數值延拓法專題

指導教師：郭岳承

對於一個連續可微的非線性函數 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$，我們想知道這非線性函數的解集合，也就是

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}, t) \mid F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}\}.$$

隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 中有提到，假如 $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{C}$，也就是 $F(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{0}$，且微分矩陣 $\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為可逆矩陣，那麼便存在一個正數 $\delta > 0$ 使得

$$\mathcal{C}_{0,\delta} = \{(\mathbf{x}(t), t) \mid F(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0} \text{ and } t_0 - \delta < t < t_0 + \delta\}$$

為非線性函數的一小段解。令 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_0 + \delta/2), t_1 = t_0 + \delta/2$，即 $(\mathbf{x}_1, t_1) \in \mathcal{C}$，如果微分矩陣 $\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}_1, t_1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 仍為可逆，便可利用隱函數定理再將解 $(\mathbf{x}_1, t_1)$ 向外延伸出去。

這非線性函數的解解集合 $\mathcal{C}$ 在分析上可以知道他的存在性，但不容易被刻畫及觀察。這專題主要想利用數值方法計算出解集合 $\mathcal{C}$，進而觀察當參數 t 在變化時，$\mathbf{x}(t)$ 的變化。數值延拓法可以解決許多問題，包括

1．利用同倫延拓法 (Homotopy continuation method) 求解多項是方程的解，如求解

$$P(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 z + 5yz^2 - 7xyz + 2 \\ 3xy^2 z - 2y^3 z^2 - 7x^2 z^2 - 5 \\ 7xyz^3 + 6yz^2 - 4x^2 yz^2 - 11 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

2．利用數值延拓法 (Numerical continuation method) 觀察一個 ODE 系統在某些參數的變化下，穩定態及不穩定態的變化行為。

3．利用數值延拓法 (Numerical continuation method) 計算非線性優化問題的解，如求

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + \frac{\rho}{3}\|\mathbf{x}\|^3,$$

其中 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 為對稱矩陣, $\rho > 0$.

對這專題有興趣的同學，須先決定欲解決的問題 (以上三類問題中挑選一個問題)，並研讀數值延拓法相關理論 [1]，最後要撰寫一隻數值延拓法的程式來解決所挑選出的問題。

Reference :

1 H.B. Keller, Lectures on Numerical Methods in Bifurcation Problems, Springer- Verlag, Berlin, 1987.