# NUK Math 徵答 002 解答

黃士峰

November 14, 2012

## 問題 002

在$m$ 個家庭中, 其中有$n_i$ 個家庭, $i = 1, \ldots, k$, 家中有$i$ 個小孩, 即$m = n_1 + \cdots + n_k$, 今考慮以下兩種取樣方法:
方法一: 先隨機挑選一個家庭,再從選取出的家庭中隨機挑選一位小孩。
方法二: 從所有的小孩中隨機挑選一位小孩。
試問那一種取樣方法比較容易挑選到家中年齡最大的小孩。

## 翁嘉駿的解法

令 $S_k$ 爲第一種方法的機率, $T_k$ 爲第二種方法的機率

$$S_k = \frac{n_1}{m} + \frac{n_2}{m} \times \frac{1}{2} + \frac{n_3}{m} \times \frac{1}{3} + \ldots + \frac{n_k}{m} \times \frac{1}{k} < 1$$
$$T_k = \frac{m}{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots + kn_k} < 1$$

若 $k = 1$ , $S_1 = \frac{n_1}{n_1} = 1 = \frac{n_1}{n_1} = T_1$, 兩方法機率相同。
若 $k > 1$ 且$n_i \neq 0,\ \forall i = 1, \ldots, k$, 則

$$\begin{aligned}
\frac{S_k}{T_k} &= \frac{(n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3} + \ldots + \frac{n_k}{k})(n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots + kn_k)}{(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k)^2} \\
&= \frac{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2 + (1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1)n_1 n_2 + \ldots + (\frac{k}{k-1} + \frac{k-1}{k})n_{k-1}n_k}{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2 + 2(n_1 n_2 + \ldots + n_{k-1}n_k)}
\end{aligned}$$

$\because \quad \dfrac{k}{k-1} + \dfrac{k-1}{k} = \dfrac{k^2 + (k-1)^2}{k^2 - k} = \dfrac{2k^2 - 2k + 1}{k^2 - k} = 2 + \dfrac{1}{k^2 - k} > 2, \forall k > 1$
$\therefore \quad \dfrac{S_k}{T_k} > 1 \Rightarrow S_k > T_k$, 第一種方法比較容易取得。

考慮 $n_1, \ldots, n_k$ 中, 存在唯一 $n_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, k$ ($i.e.\ n_j = 0,\ \forall j \neq i, j = 1, \ldots, k$), 則$\dfrac{S_k}{T_k} = \dfrac{n_i}{n_i} = 1 \Rightarrow S_k = T_k$, 此時兩方法機率相同。

## 答題優良名單

大三(103級): 翁嘉駿, 賴俞瑾, 林彥廷