

NUK Math 徵答 005 解答

鄭斯恩

December 18, 2012

問題 005

Prove that, for $n \geq 0$,

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = 2.$$

連威翔的解法

(A)

當 $n \geq 2$ 時, $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left[\frac{n-k}{n-k} + \frac{k}{n-k} \right] \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{k}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \binom{n-k-1}{k-1} 2^{n-2k}$$

$$\begin{aligned} \because \frac{k}{n-k} \binom{n-k}{k} &= \frac{k}{n-k} \cdot \frac{(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \\ &= \binom{n-k-1}{k-1} \end{aligned}$$

令 $K = k-1$, 則 $k = K+1$, 且

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k \binom{n-k-1}{k-1} 2^{n-2k} = \sum_{K \geq 0} (-1)^{K+1} \binom{n-2-K}{K} 2^{n-2-2K}$$

因此, 原式 $= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} - \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-2-k}{k} 2^{n-2-2k}$

(B) 令 $A_n = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}$, 則 原式 在 $n \geq 2$ 時, 有

原式 $= A_n - A_{n-2} \dots \textcircled{1}$. 不難計算出 A_0 及 A_1 的值如下:

$A_0 = \binom{0}{0} 2^0 = 1$, $A_1 = \binom{1}{0} 2^1 = 2$. 觀察 A_{n+2} 並推導如下: 其中 $(n \geq 0)$

$$A_{n+2} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n+2-k}{k} 2^{n+2-2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left[\binom{n+1-k}{k} + \binom{n+1-k}{k-1} \right] 2^{n+2-2k}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n+1-k}{k} 2^{n+1-2k} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \binom{n+1-k}{k-1} 2^{n+2-2k} \dots \textcircled{2}$$

令 $K = k-1$, 則 $k = K+1$, 且 $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \binom{n+1-k}{k-1} 2^{n+2-2k}$

$$= \sum_{K \geq 0} (-1)^{K+1} \binom{n-K}{K} 2^{n-2K} = - \sum_{K \geq 0} (-1)^K \binom{n-K}{K} 2^{n-2K} = -A_n \dots \textcircled{3}$$

由②, ③可知 $A_{n+2} = 2A_{n+1} - A_n \Rightarrow A_{n+2} - A_{n+1} = A_{n+1} - A_n, n \geq 0$

因此 $\langle A_n \rangle$ 為等差數列, 公差 $d = A_1 - A_0 = 2 - 1 = 1$,

回到①, 即知 $\boxed{\text{原式}} = A_n - A_{n-2} = 2d = 2$, 其中 $n \geq 2$.

(c) 當 $n=0$ 及 $n=1$ 時, $\boxed{\text{原式}}$ 之值分別為

$$(-1)^0 \frac{0}{0} \binom{0}{0} 2^0 \text{ 無意義}, \text{ 以及 } (-1)^0 \frac{1}{1-0} \binom{1-0}{0} 2^1 = 2.$$

由以上可知在 $n \geq 1$ 時,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-k} = 2 \text{ 恆成立.}$$

★ 原題目寫「for $n \geq 0$ 」, 個人認為應改為「for $n \geq 1$ 」, 謝謝!

除非特地將 $\frac{0}{0}$ 定為 2, 則沒問題。

答題優良名單

博士班: 連威翔

大三(103級): 翁嘉駿