NUK Math 徵答 007 解答：.

張惠蘭

007

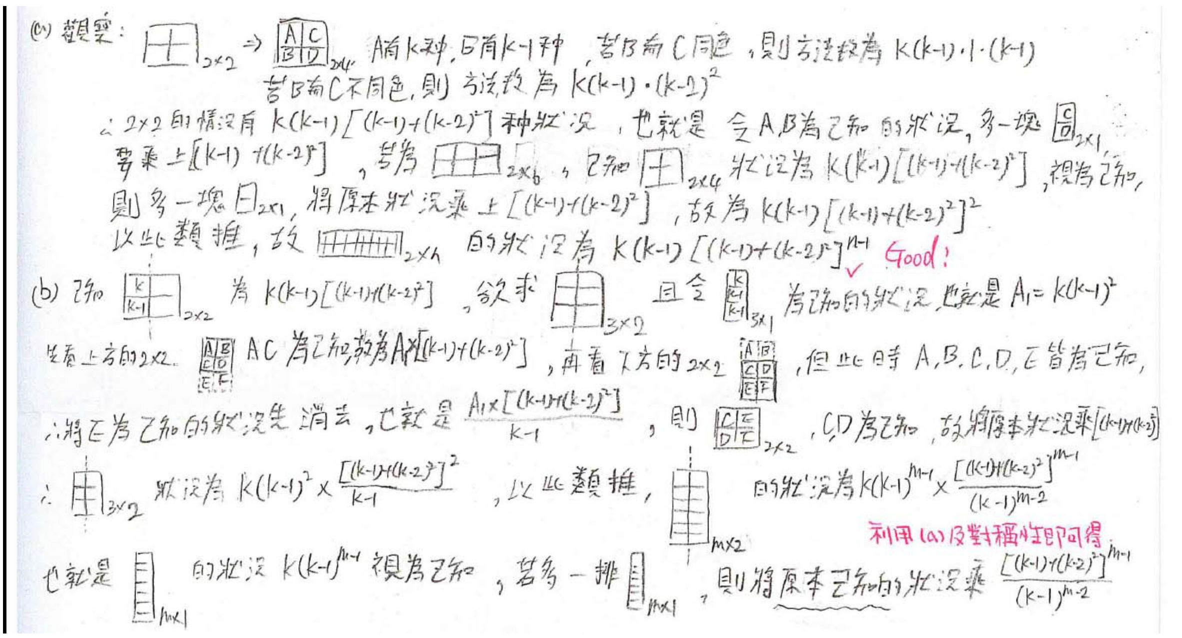
(a)在$2 \times n$ 的棋盤(下圖為一2×5 的棋盤)上，用 k 種不同的顏色來塗各區域，規定「相鄰的區域，不能塗同樣的顏色」，那麼總共有幾種不同的塗法？

(b)承(a)，若推廣成$m \times n$ 的棋盤，則總共有幾種不同的塗法?

解：賴俞瑾的解法

(a) 2×1 的棋盤有 $k(k-1)$ 種塗法。考慮 2×2 的棋盤如下圖，其中 AB 兩區域必不同色,則區域 C 和 D 之塗法數為任意塗 CD 使其不同色之塗法數−(CD 不同色且 C 和 A 同色或 D 和 B 同色)+(CD 不同色且 AC 同色且 BD 同色)
$=k(k-1)-2(k-1)+1 \quad = k^2-3k+3.$ 因此 2×2 棋盤的塗法數為 $k(k-1)(k^2-3k+3)$。推廣至 $2\times n$ 的棋盤：因第 $n-1$ 行的兩區域必不同色，利用之前的推論可得塗第 n 行的那兩區域的方法數為 $k^2-3k+3.$ 因此 $2\times n$ 的棋盤的塗法數為 $k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$.

A	C
B	D


(a) 觀察：$\boxplus_{2\times2} \Rightarrow$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A&C\\\hline B&D\\\hline\end{array}_{2\times2}$ A有k种，B有k-1种，若B和C同色，則方法數為 $k(k-1)\cdot1\cdot(k-1)$
若B和C不同色，則方法數為 $k(k-1)\cdot(k-2)^2$
∴ 2×2 的情況有 $k(k-1)[(k-1)+(k-2)^2]$ 种狀況，也就是令A,B為已知的狀況，多一塊 $\begin{array}{|c|}\hline C\\\hline D\\\hline\end{array}_{2\times1}$ 要乘上 $[(k-1)+(k-2)^2]$，若為 $\boxplus\boxplus_{2\times6}$，已知 $\boxplus_{2\times4}$ 狀況為 $k(k-1)[(k-1)+(k-2)^2]$，視為已知，則多一塊 $日_{2\times1}$，將原本狀況乘上 $[(k-1)+(k-2)^2]$，故為 $k(k-1)[(k-1)+(k-2)^2]^2$
以此類推，故 $\boxplus_{2\times n}$ 的狀況為 $k(k-1)[(k-1)+(k-2)^2]^{n-1}$ Good!
(b) 已知 $\begin{array}{|c|c|}\hline k&\\\hline k-1&\\\hline\end{array}_{2\times2}$ 為 $k(k-1)[(k-1)+(k-2)^2]$，欲求 $\boxplus_{3\times2}$ 且令 $\begin{array}{|c|}\hline k\\\hline k-1\\\hline k-1\\\hline\end{array}_{3\times1}$ 為已知的狀況，也就是 $A_1=k(k-1)^2$
先看上方的2×2 $\begin{array}{|c|c|}\hline A&B\\\hline C&D\\\hline E&F\\\hline\end{array}$ AC 為已知，故為 $A_1\times[(k-1)+(k-2)^2]$，再看下方的2×2 $\begin{array}{|c|c|}\hline A&B\\\hline C&D\\\hline E&F\\\hline\end{array}$，但此時 A,B,C,D,E 皆為已知，
∴將E為已知的狀況先消去，也就是 $\frac{A_1\times[(k-1)+(k-2)^2]}{k-1}$，則 $\begin{array}{|c|c|}\hline C&E\\\hline D&F\\\hline\end{array}_{2\times2}$，C,D為已知，故將原本狀況乘 $[(k-1)+(k-2)^2]$
∴ $\boxplus_{3\times2}$ 狀況為 $k(k-1)^2\times\frac{[(k-1)+(k-2)^2]^2}{k-1}$，以此類推，$\boxplus_{m\times2}$ 的狀況為 $k(k-1)^{m-1}\times\frac{[(k-1)+(k-2)^2]^{m-1}}{(k-1)^{m-2}}$
利用(a)及對稱性即可得
也就是 $目_{m\times1}$ 的狀況 $k(k-1)^{m-1}$ 視為已知，若多一排 $目_{m\times1}$，則將原本已知的狀況乘 $\frac{[(k-1)+(k-2)^2]^{m-1}}{(k-1)^{m-2}}$

但此方法無法推廣至 $m \times n$ 的棋盤，因前一行(m 個區域)的塗法會受前面數行

的影響和之前只有一行的情況不同。但此手法可用來導出某些特殊圖形的區域塗法數。

(To date, problem (b) has not yet been solved.)

答題優良名單：

103 級：賴俞瑾