NUK Math 徵答 011 解答

黃士峰

February 20, 2013

問題 011

某公司爲爭取市佔率推出N 種不同樣式的公仔, 消費者每次消費滿100元即可免費抽取一個公仔, 假設每次抽取時每個公仔被抽到的機率相同, 今小明共收集n 個公仔, 試問在這n 個公仔中, 不同樣式公仔的期望個數爲何?

連威翔的解法

假設消費者抽取n次後，所得的不同樣式公仔的期望個數(以下簡稱爲期望個數)爲a_n，並合理假設$a_0 = 0$.

當$n \ge 1$時，設第n次抽取完後，前n次所得的期望個數較前$n-1$次抽完後所得期望個數增加b_n個，即$b_n = a_n - a_{n-1}$。以下稱b_n爲第n次的增加期望個數。

若只抽取 1 次，得 1 種公仔的機率爲 1，因此$a_1 = 1$。

以下假設$n \ge 1$。若考慮第n次的抽取，此時尚未取得的樣式公仔的期望個數爲$N - a_{n-1}$個，因此第n次抽取時取得 1 個尚未得到過的公仔之機率爲$\dfrac{N - a_{n-1}}{N}$，可得增加期望個數$b_n = \dfrac{N - a_{n-1}}{N} \times 1 = \dfrac{N - a_{n-1}}{N}$。

又$b_n = a_n - a_{n-1}$，可知：

$$a_n = a_{n-1} + b_n = a_{n-1} + \frac{N - a_{n-1}}{N} = 1 + \frac{N-1}{N} a_{n-1}$$

於上式的兩端同減N後，可得

$$a_n - N = \frac{N-1}{N} a_{n-1} - (N-1) = \frac{N-1}{N}\left(a_{n-1} - N\right)$$

因此

$$a_n - N = \frac{N-1}{N}\left(a_{n-1} - N\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \left(a_{n-2} - N\right) = \cdots = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \left(a_0 - N\right)$$

亦即

$$a_n - N = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \left(-N\right) = -\frac{\left(N-1\right)^n}{N^{n-1}}$$

最後可得

$$a_n = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$$

或者可展開後表爲

$$a_n = N - \frac{\sum_{k=0}^{n} C_k^n (-1)^k N^{n-k}}{N^{n-1}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k^n (-1)^{k+1} N^{n-k}}{N^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} C_k^n (-1)^{k+1} N^{1-k} = n - \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k C_k^n}{N^{k-1}}$$

以上兩式，均可表示小明所得的不同樣式公仔期望個數。.

答題優秀名單

博士班: 連威翔

大三103級: 張奕得